4/11/19

• Αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $<_{degrevlex}$

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
$a=(a_1, \dots, a_n)$
$\beta=(\beta_1, \dots, \beta_n)$ $\in \mathbb{N}^n$

Ορισμός: $x^a <_{degrevlex} x^\beta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i$

Αν $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ τότε

για τις πρώτες διαφορετικές συνιστώσες των a, β από τα δεξιά ισχύει $a_i > \beta_i$.

Πχ $\mathbb{T}^3$ x_1^4, $x_1x_2x_3$, $x_1^2x_2$, $x_1x_3^2$, x_1^3, $x_2x_3^2$, $x_1x_2^2$, x_3^3, $x_1^2x_3$, $x_2^2x_3$

$x_1>x_2>x_3$ (μεγαλύτερο το μονώνυμο με τα λιγότερα x_3)

• $<_{degrevlex}$: $x_1^4 >_{degrevlex} x_1^3 >_{degrevlex} x_1^2x_2 >_{degrevlex} x_1x_2^2 >_{degrevlex} x_1^2x_3 >_{degrevlex} x_1x_2x_3 >_{degrevlex} x_2^2x_3 >_{degrevlex} x_1x_3^2 >_{degrevlex} x_2x_3^2 >_{degrevlex} x_3^3$.

μεγ. αυτό που έχει τα πιο πολλά x_2

• $<_{deglex}$: $x_1^4 >_{deglex} x_1^3 >_{deglex} x_1^2x_2 >_{deglex} x_1^2x_3 >_{deglex} x_1x_2^2 >_{deglex} x_1x_2x_3 >_{deglex} x_1x_3^2 >_{deglex} x_2^2x_3 >_{deglex} x_2x_3^2 >_{deglex} x_3^3$

Στην αντίστροφη λεξικογραφική (όχι βαθμωτή) δεν κοιτάω τους βαθμούς! (μη μονωνυμική διάταξη)

Διάταξη γινομένου

Ορισμός: Θεωρούμε πολ/κούς δακτυλίους $S_1 = \mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{1\mu_1}]$, $<_1$

$S_2 = \mathbb{K}[x_{21}, \dots, x_{2\mu_2}]$, $<_2$

$\vdots$

$S_k = \mathbb{K}[x_{k1}, \dots, x_{k\mu_k}]$, $<_k$

$\in \quad S = \mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{1\mu_1}, x_{21}, \dots, x_{2\mu_2}, x_{k1}, \dots, x_{k\mu_k}]$

Θεωρώ τα μονώνυμα $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$ και $y^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_k^{\beta_k}$

όπου $x_1^{a_1}, x_1^{\beta_1} \in S_1$

$x_2^{a_2}, x_2^{\beta_2} \in S_2$

$\vdots$

$x_k^{a_k}, x_k^{\beta_k} \in S_k$

ορίζουμε $x^a \underset{prod}{<} y^\beta \iff x_1^{a_1} <_1 x_1^{\beta_1}$

Αν $x_1^{a_1} = x_1^{\beta_1}$ τότε $x_2^{a_2} <_2 x_2^{\beta_2}$

Αν $x_2^{a_2} = x_2^{\beta_2}$ τότε $x_3^{a_3} <_3 x_3^{\beta_3}$

$\vdots$

$x_k^{a_k} <_k x_k^{\beta_k}$.

Πχ $S_1 = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ $\leq_{1lex}$ με $x_1 > x_2 > x_3$

$S_2 = \mathbb{K}[x_4, x_5]$ $\leq_{2degrevlex}$ με $x_4 > x_5$

Θα διατάξω στον $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ $\underset{prod}{\leq}$ με $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

$\underbrace{x_1 x_2^2} x_4 x_5$, $\underbrace{x_1 x_2 x_3} x_4$, x_4^4, $\underbrace{x_1 x_2^2} x_5$, $\underbrace{x_1 x_2} x_5^2$, x_4^3

Συγκρίνω πρώτα τα $\underset{x_4 x_5}{x_1 x_2^2}$, $x_1 x_2 x_3$, 1, $\underset{x_5}{x_1 x_2^2}$, $x_1 x_2$, 1

$x_1 x_2^2 x_4 x_5 \underset{prod}{>} x_1 x_2^2 x_5 \underset{prod}{>} x_1 x_2 x_3 x_4 \underset{prod}{>} x_1 x_2 x_5^2 \underset{prod}{>} x_4^4 \underset{prod}{>} x_4^3$

(*) Διάταξη γινομένου σε 2 δακτυλίους καλείται διάταξη απαλοιφής.

- Διάταξη βάρους.

Ορισμός Ορίζουμε βαθμό βάρους $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ενός μονωνύμου $x^a \in \mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$, $deg_w(x^a) = w_1 a_1 + \dots + w_n a_n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$

Πχ $w = (1, 2, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_4]$

$x_1^3 x_3 x_4^2 = x^a$, $a = (3, 0, 1, 2)$

$deg_w(x^a) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$.

Ορισμός: Έστω διάνυσμα $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ και έστω μια $<$ μονωνυμική διάταξη.

Ορίζουμε διάταξη βάρους $<_{\omega,<}$ στον T^n με $x_1>\dots>x_n$

$x^a <_{\omega,<} x^\beta \iff deg_\omega(x^a) < deg_\omega(x^\beta)$

Αν $deg_\omega(x^a) = deg_\omega(x^\beta)$ τότε $x^a < x^\beta$

Πχ $\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ με $x_1>x_2>x_3>x_4$ $<_{degrevlex}$

$\underset{\mu_1}{x_1x_2x_3^2x_4}$, $\underset{\mu_2}{x_1x_2^2x_3x_4}$, $\underset{\mu_3}{x_1^2x_2x_3x_4^2}$, $\underset{\mu_4}{x_2^5}$, $\underset{\mu_5}{x_1x_3x_4}$

(με $\omega=(1,3,0,5)$) $\quad$ 12 $\quad$ 15 $\quad$ 15 $\quad$ 6

$deg_\omega(\;) = 1\cdot1+3\cdot1+0\cdot2+5\cdot1$
$=9$

(Αν έχω ίδιο βαθμό, συγκρίνω ως προς την διάταξή μου).

$\underset{=15}{deg_\omega(\mu_3,\mu_4)} > \underset{=12}{deg_\omega(\mu_2)} > \underset{=9}{deg_\omega(\mu_1)} > \underset{=6}{deg_\omega(\mu_5)}$

$\mu_4,\mu_3 >_{\omega degrevlex} \mu_2 >_{\omega degrevlex} \mu_1 >_{\omega degrevlex} \mu_5$

$deg_\omega(\mu_4) = deg_\omega(\mu_3)$ Διατάσσω τα μ_3,μ_4 ως προς degrevrel

$6=deg(\mu_3) > deg(\mu_4)=5 \Rightarrow \mu_3 >_{degrelvel} \mu_4$

Άρα $\mu_3 >_{\omega degrevlex} \mu_4 >_{\omega degrevlex} \mu_2 >_{\omega degrevlex} \mu_1 >_{\omega degrevlex} \mu_5$

Διαίρεση Πολυωνύμων

Έστω $\varphi(x) = a_1x^{\beta_1}+\dots+a_kx^{\beta_n} \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ Έστω $<$ διάταξη του $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$, $x_1>x_2>\dots>x_n$

Θεωρώ ότι έχω διατάξει βάσει της $<$ τα $x^{\beta_1},\dots,x^{\beta_n}$

Έστω, το μεγαλύτερο x^{β_1} $\quad lt(\varphi(x)) = a_1x^{\beta_1}$ (αρχικός όρος)

$lc(\varphi(x)) = a_1$ (αρχικός συντελεστής)

$lm(\varphi(x)) = x^{\beta_1}$ (αρχικό μονώνυμο)

Πχ $\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ με $x_1>x_2>x_3>x_4$ $<_{degrevlex}$

$f = -x_1x_2x_3^2x_4 + 2x_1x_2^2x_3x_4 + \frac{1}{2}x_1^2x_2x_3x_4^2 + \sqrt{2}\,x_2^5 + x_1x_3x_4$

$\Rightarrow lt(f) = \frac{1}{2} x_1^2 x_2 x_3 x_4^2$

$lc(f) = \frac{1}{2}$

$lm(f) = x_1^2 x_2 x_3 x_4^2$

Πχ $\underbrace{x^3 - 2x^2 + 2}_{=\varphi_1(x)} : \underbrace{2x - 1}_{=\varphi_2(x)}$, $\in \mathbb{C}[x]$

φ_1, φ_2 με $\varphi_2 \neq 0$
$\Rightarrow \exists\, \pi(x), u(x)$
$\varphi_1(x) = \pi(x)\varphi_2(x) + u(x)$
όπου $u(x) = 0$
ή $\deg(u(x)) < \deg(\pi(x))$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 2 & 2x - 1 \\
\hline
-x^3 + \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \\
\hline
u_1 = -\frac{3}{2}x^2 + 2 & \\
+\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x & \\
\hline
u_2 = -\frac{3}{4}x + 2 & \\
\frac{3}{4}x - \frac{3}{8} & \\
\hline
\frac{13}{8} = u_3 &
\end{array}
$$

$\varphi_1(x) = -\pi(x)\varphi_2(x) + \frac{13}{8}$

$u_1 = \varphi_1 - \frac{lt(\varphi_1)}{lt(\varphi_2)} \cdot \varphi_2$
$u_2 = u_1 - \frac{lt(u_1)}{lt(\varphi_2)} \varphi_2$

→ δεν μπαίνει υποχρεωτικά ο μεγιστοβάθμιος (μπαίνει όποιος όρος διαιρείται από το μεγιστοβ. του φ_2)

$u_1 = \varphi_1 - \frac{lt(\varphi_1)}{lt(\varphi_2)} \varphi_2$, συμβολ $\varphi_1 \xrightarrow{\varphi_2} u_1$ (το φ_1 ανάγεται στο u_1 μέσω του φ_2)

Ορισμός Θεωρούμε πολυώνυμο $\varphi, u, \varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ και $\varphi_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, s$

Ορίζουμε το φ ανάγεται στο u μόδιο το σύνολο $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ αν υπάρχει ακολουθία δεικτών $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, s\}$

$\varphi \xrightarrow{\varphi_{i_1}} u_1 \xrightarrow{\varphi_{i_2}} u_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_{i_k}} u$

(συμβ $\varphi \xrightarrow{F}_{+} u$)

Ορισμός Ένα πολυώνυμο $u \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ καλείται ανάγωγο μόδιο F αν $u = 0$ ή δεν υπάρχει όρος x^a του u τ.ω. να $\exists$ δείκτης i_j με $lt(\varphi_{i_j}) \mid x^a$

Σε αυτή την περίπτωση, το u καλείται υπόλοιπο και η διαδικασία της αναγωγής καλείται διαίρεση.

Πχ Έστω $f = x^3y^3 + 2y^2$, $f_1 = \overset{lt(f_1)}{2xy^2} + 3x + 4y^2$, $f_2 = \overset{lt(f_2)}{y^2} - 2y - 2 \in \mathbb{Q}[x,y]$

$<_{lex}$ με $x > y$ $\qquad f \xrightarrow{F=\{f_1,f_2\}}$;

$x^3y^3 >_{lex} 2y^2$
$2xy^2 >_{lex} 3x >_{lex} 4y^2$
$y^2 >_{lex} -2y >_{lex} -2$
} διατάσω τα μονώνυμα με $<_{lex}$

$$f \xrightarrow{f_1} x^3y^3 + 2y^2 - \frac{x^3y^3}{2xy^2}(2xy^2 + 3x + 4y^2)$$

$= 2y^2 - \frac{3}{2}x^3y - 2x^2y^3$ (διατάσω πάλι λεξικογραφικά)

$= -\frac{3}{2}x^3y - 2x^2y^3 + 2y^2$

αυτό δεν διαιρείται

$$\xrightarrow{f_1} -\frac{3}{2}x^3y - 2x^2y^3 + 2y^2 - \frac{-2x^2y^3}{2xy^2}(2xy^2 + 3x + 4y^2)$$

$= -\frac{3}{2}x^3y + 2y^2 + 3x^2y + 4xy^3 = -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 4xy^3 + 2y^2$

$$\xrightarrow{f_2} -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 4xy^3 + 2y^2 - \frac{2y^2}{y^2}(y^2 - 2y - 2)$$

$= -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 4xy^3 + 4y + 4$

$$\xrightarrow{f_2} -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 4xy^3 + 4y + 4 - \frac{4xy^3}{y^2}(y^2 - 2y - 2)$$

$= -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 8xy^2 + 8xy$

$$\xrightarrow{f_2} -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + 8xy^2 + 8xy - \frac{8xy^2}{y^2}(y^2 - 2y - 2)$$

$= -\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y + \underbrace{8xy + 16xy}_{=24xy} + 16 = u$

Παρατηρώ ότι $\nexists$ όρος του u: $lt(f_1)$, $lt(f_2)$ να τον διαιρεί

$\Rightarrow$ $\boxed{f \xrightarrow[+]{F} u}$

Στις σημειώσεις:

$$f \xrightarrow[+]{F} u' = -\frac{3}{2}x^3 + 3x^2y - 6xy - 44y - 28$$

→ Παρατηρώ ότι το u δεν είναι μοναδικό !
(Αν είχα βάση grobner, το υπόλοιπο θα ήταν μοναδικό.)

Παρατήρηση

① $I = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_s \rangle$ για τυχαίο $\varphi \in I$, ($\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_s\varphi_s$)

$\varphi \xrightarrow[+]{F} 0$, όπου $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ η συνθήκη δεν είναι ($\Leftarrow$) αφού το υπόλοιπο όχι απαραίτητα μοναδικό.

② $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $f_1 \xrightarrow[+]{F} u_1$, $f_2 \xrightarrow[+]{F} u_2$, $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 + f_2 \xrightarrow[+]{F} \,; \\ \\ f \cdot g \xrightarrow[+]{F} \,; \end{array}\right\} \text{δεν μπορώ να πω κάτι!}$$

Πχ $f = x^2y + 1$, $g = x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x,y]$ με $<_{lex}$ $x > y$.

$f \xrightarrow{f_2} 1 - x = u_1$

$g \xrightarrow{f_1} -2 = u_2$

$f + g \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_1} -y - 1 = u$ $\boxed{u \neq u_1 + u_2}$ (ισχύει αν κάνεις $f \xrightarrow[u = u_1 + u_2]{f_1}$)

(ομοίως για το $f \cdot g$)

Ασκήσεις 2ο Κεφ.
10, 12, 21, 22, 23, 27